

丘成桐中学科学奖

经济金融建模

-大型企业通勤班车运输成本优化模型研究-

初赛作品

2018-09-28

2018S. -T. Yau High School Science Award

题目：大型企业通勤班车运输成本优化模型研究

中文摘要：大型企业员工的通勤运输不同于物流配送的车辆调度和路径规划问题，涉及通勤站点设置、车辆配置、行驶路线规划、行驶时间和行驶路程均衡性等多个方面。针对此类问题，本文一是摒弃了惯常成本优化模型的求解过程中先列式，再计算，然后求解的步骤，采用建立运输成本数学模型后，不直接计算求解，而是根据成本模型的构成要素，先分析成本模型的影响因素，忽略不影响因素或不变部分，再优化成本模型的主要因素，从而抓住了主要矛盾，简化了成本模型的求解过程；二是在求解通勤站点设置问题时，并未拘泥于获得一个解析解或数值解，而是给出一个求解方法和求解过程。运输成本模型的具体优化过程是：首先将通勤覆盖区域划分为若干个边长为 3.5 公里的正方形区块，以区块中心位置为初始通勤站点，然后将初始站点位置调整到邻近主干道和公交站点的位置，以企业通勤员工总人数与大巴车座位数的商为通勤路线数，选定企业地址和旅游公司停车场为起点和终点，运用迪杰斯特拉算法确定多条行驶路线从起点途径通勤站点再到终点的最短行驶路径，定义路程均衡度和座位系数两个参变量，用路程均衡度作为约束条件，行驶路程作为运输成本的主要评价函数，建立最小行驶路程和最小座位系数和的非线性规划模型，并运用 Lingo 软件求解，获得通勤车最小运输成本的最优行驶路径。通过模型分析、验证和改进，得出通勤班车运输成本优化数学模型可有效解决企业通勤运输调度问题的结论。

关键词：通勤班车；迪杰斯特拉算法；运输成本；路程均衡度；座位系数

目录

1. 前言.....	1
1.1 问题重述.....	1
1.2 问题分析与建模思路.....	1
2. 模型建立与求解.....	2
2.1 模型假设.....	2
2.2 符号说明.....	2
2.3 模型建立与求解.....	2
2.3.1 问题 1 建模与求解.....	2
2.3.2 问题 2 建模与求解.....	4
2.3.3 问题 3 建模与求解.....	7
3. 模型分析与检验.....	8
3.1 模型分析.....	8
3.2 模型检验.....	9
4. 模型评价与后续改进.....	10
4.1 模型评价.....	10
4.2 后续改进.....	10
5. 结论.....	11
参考文献.....	12

2018S

T. Yau High School Science Award

1. 前言

1.1 问题重述

通勤车是企业为方便和减少员工上下班路途的时间消耗，提供的上下班班车服务。通常有固定的站点停靠时刻和行驶路线。为了降低运输成本和管理费用，目前大多数企业都将通勤车运输服务委托给旅游车辆有限公司（以下简称旅游公司）。对旅游公司来讲，根据企业的通勤人数、企业地址、员工居住地址、通勤时间等要求，科学合理的配置车辆类型和数量，设置通勤站点位置和数量、规划行驶路线等，进而确定运输方案是一个很复杂的问题，需要经过长时间的试运行和调整才能达到比较理想的结果。现有一旅游公司，承接了一大型企业的员工通勤运输任务，请选定一企业和通勤城镇，建立通勤运输调度数学模型，快速为旅游公司制定一个运输方案，确定通勤站点、通勤车辆和行驶路线，既满足企业的运输时间要求，又降低旅游公司的运输成本。

问题 1：选定某一城镇作为通勤覆盖区域和企业地址，根据企业通勤员工数量和居住地址，合理设置通勤站点的位置和数量；

问题 2：按最小运输成本确定需配置的通勤车类型、数量和行驶路线；

问题 3：最小运输成本条件下，如何保证不同行驶路线通勤车运输任务的均衡性。

1.2 问题分析与建模思路

由题意可知，本次选题是以城镇区域的大型企业通勤班车运输调度问题为研究背景，运用数学建模的理论方法，分析影响运输成本的因素，提出应对策略和解决方案，给通勤车运输调度提供参考。

针对问题 1，通常情况下，通勤站点应该距离员工住址在步行 30 分钟范围内，将通勤班车覆盖的城区划分为正方形，以正方形的中点为初始通勤站点，若从正方形内任一点到中心的距离都小于 2.5 公里，按步行速度 5 公里/小时计算，即可保证员工下车后 30 分钟内到家，然后考虑该正方形区域的通勤人数，调整初始通勤站点到交通主干道，即可初步确定通勤站点的位置和数量。

针对问题 2，使用百度导航地图（或 Google 的 GPS 导航系统）可得到相邻站点之间最短行驶时间所对应的路径^[1]（之所以不设置导航系统的最短路程优化，是因为最短路径往往是小巷窄道，不利于通勤大巴车的通过），将公路网中得每个通勤站点视为节点，连接通勤站点的公路视为节点之间的边线，站点之间的距离视为对应边线的权值，公路网就转化为加权网络图，利用迪杰斯特拉算法（Dijkstra）算法获得起点到终点的最短路径^[2,3]。

另外，根据《企业会计准则》运输成本项目可划分为直接人工、直接材料、其他直接费用和营运间接费用四部分^[4]，这四部分所包含的内容实际可合并为三类：一是与车辆的型号（或规格）相关联的，如车辆保养、折旧、养路费等，二是与行驶路程相关联的，如

燃料和轮胎损耗；三是与车辆数量相关联的，如司机和助手人数，所以运输成本的计算可转化为车辆数量和类型、行驶路程的计算，可通过多目标优化方法得到最小运输成本下的车辆配置和行驶路线。

针对问题 3，考虑到不同行驶路线的运输成本、运输时间和运输路程不同，且不同运输路线运输成本的差别主要是运输时间或运输路程造成的，可通过通过设定允许偏差，比较不同运输路线的运输路程的差距，并将此偏差作为目标函数的约束条件加入到多目标优化中，求解即可保证不同行驶路线的在时间和路程上的均衡性。

2. 模型建立与求解

2.1 模型假设

1) 所有通勤车起点（企业地址）相同，终点相同（停车场），每个通勤站点设定后位置和乘客数不发生变化；

2) 通勤车在市内行驶，忽略不同行驶路线间路况和交通信号灯的影响，通勤时段行驶速度取平均值 $v = 45$ 公里/小时；

3) 通勤车行驶路线为从起点开始，向接近终点的方向行进，不能反向行驶，即下一个停靠站点与前一个站点相比，不能远离终点；

4) 企业通勤车型号相同（便于维护维修），座位数确定，且不可以超载；

5) 每个通勤车站点停靠时间相同，平均为 6min，即 $\tau = 1/10$ h；

6) 影响运输成本的因素主要是驾驶员人数、行驶路程和车辆型号，折旧、保养等费用可归并到车辆型号中；

7) 车辆型号决定车辆的各种费用参数，可用座位数表示不同型号通勤车辆的区别。

2.2 符号说明

建模和求解过程中使用的高频数学符号及其物理含义如表 1 所示，其余符号在公式后做注解说明。

2.3 模型建立与求解

2.3.1 问题 1 建模与求解

通勤车在市内行驶的平均速度为 45 公里/小时，借助于导航地图，将通勤车覆盖范围确定为市区，以此作为通勤区域，可获得从通勤车始发站（企业地址）到最远处的行驶距离为 50 公里，步行距离为 35 公里。将通勤区域划分为边长 3.5 公里的正方形，每一个通勤站点设在正方形的中点，如图 1 中黑色小方块，则从正方形内任一点到中心的距离都小于 $3.5\sqrt{2}/2 = 2.5$ 公里，按步行速度 5 公里/小时计算，30 分钟内即可到家，由此得到 25

个站点。但是，这种通勤站点设置方法，会导致通勤站点出现在不能或不易停靠的位置，如禁止停靠路段、单行线，甚至无路处，所以，需要将站点“迁移”到交通主干道上，或道路交叉口，或靠近公交地铁站，如图 1 中的红圆点所示。既保证员工上下车的安全，也便于员工转乘其他车辆，而且避免在通勤车停靠的上下班时段堵塞交通繁忙路段。

表 1. 数学符号及其物理含义

符号	物理含义	单位	备注
v	通勤车市内平均行驶速度 (45)	公里/时	
adj_matrix	相邻站点最短路径邻接矩阵		
w	邻接矩阵的稀疏矩阵		
n	通勤站点数量	个	
q	通勤车载客人数 (座位数)	个/辆	
m	通勤车辆数量	个	
k	通勤车辆编号		
i, j	通勤站点序号		
T_{total}	通勤任务总运输时间	min	
τ	通勤车停靠站点平均时长	min	
Q	企业通勤员工总人数	人	
S_i	座位系数		
S_{coe}	通勤任务车辆座位系数和		
P_{seat}	与车辆型号相关联的管理费	元	
Q_s	车辆每公里油耗	L/公里	
L_{route}^k	第 k 辆车的行驶路程	公里	
W_{pay}	旅游公司司乘人员薪酬	元	
η	路程均衡度		

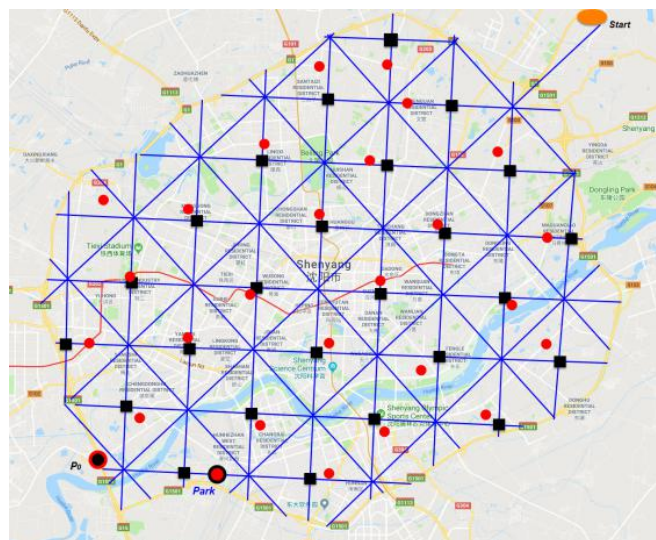


图 1. 通勤站点设置

将“迁移”后得到的 25 个通勤站点，分别用一个大写字母和一个带括弧的数字组合表示：A(1)，B(2)，C(3)，D(4)……Y(23)，Z(24)，其中字母表示站点的编号，括弧内数字表示站点的通勤人数（上下车人数）。起始站点用 S(*) 表示，旅游公司停车场用 P(*) 表示，为了便于处理（实际计算只需额外考虑到旅游公司的实际路程），将停车场与其附近的通勤站点 P 合并，记为 P(*)。由此得到通勤站点的位置和数量，按照企业通勤员工的人数及居住分布区域，可得到如表 2 所示的通勤站点、通勤人数配置。

表 2. 通勤站点和通勤人数配置

通勤站位置	S	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	Q	R	T	U	V	W	X	Y	Z	P
通勤员工人数	0	9	9	7	6	7	8	26	25	11	22	27	29	22	8	11	33	27	20	18	22	24	15	15	12	13

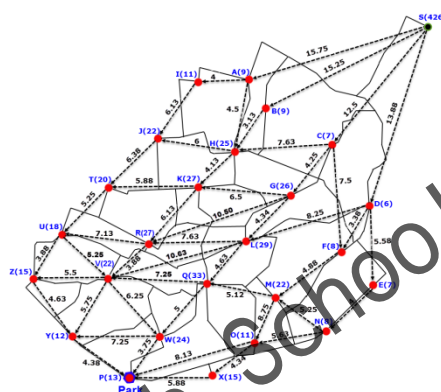


图 2. 通勤站点和通勤人数加权网络图

2.3.2 问题 2 建模与求解

将图 2 公路网中每个通勤站点视为图论中的节点，站点之间的道路视为节点之间的边线，站点之间的距离视为对应边线的权值，公路网图就转化为加权网络图^[5]。图 2 中实线连成的网络即为通勤车的实际行驶路线，有向虚线网络为相邻站点通勤车的行驶方向、路线和最短距离。根据百度地图实时路况，删除上下班高峰期的拥堵路段（如 I-K、K-Q 路段）和逆行（包含交通管理部门划定的逆行和本文定义的向 S 点靠近定义为逆向行驶）路段（如 A-B，C-D，E-F，G-F，H-G，I-H，F-N，O-L，J-K，T-R 路段）后，用相邻站点之间的有向虚线段表示通勤车可选择行驶的路径和方向，虚线上的数字表示相邻站点最短行驶时间所对应的距离。例如 B-H 相邻站点，通勤车只能从 B 点驶向 H 点，最短距离为 3.13 公里。据此可得到一个 26x26 的邻接矩阵 adj_matrix 。若站点之间有路，对应的权值是大于 0 的实数，若站点之间无路，则对应的权值取无穷大 (inf)。利用 MATLAB 的 sparse (adj_matrix) 命令得到邻接矩阵的稀疏矩阵 w 。

	(S	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	Q	R	T	U	V	W	X	Y	Z	P)
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
15.75	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
15.25	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
12.50	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
13.88	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	7.50	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	4.25	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	4.50	3.13	7.63	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	4.00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	6.00	6.13	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	6.50	4.13	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4.34	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	4.88	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	4.00	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	8.75	5.63	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	4.63	5.12	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	10.50	∞	∞	∞	6.13	7.63	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	6.38	5.88	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	7.13	5.25	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	10.63	∞	∞	∞	7.25	3.88	∞	5.25	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5.00	∞	∞	∞	6.25	0	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3.88	5.50	7.25	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	5.75	∞	∞	4.63	0	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	8.13	∞	∞	∞	∞	2.75	5.88	∞	∞	0	∞

设通勤站点的数量为 n (这里 $n=26$, 包含起始点 S), 编号为 $0 \sim 25$, 将每个通勤站点视为一个有向图的顶点, 用 V_i 表示 ($i=0,1,2 \dots n$), 其值为该通勤站点的通勤人数, 两个站点之间的最短路径用权值 w_{ij} 表示 ($i, j=0,1,2 \dots n$), 设通勤车的核定载客数为 q , 通勤所需车辆数为 m , 为建立模型, 定义如下的决策变量^[6]:

$$r_{ij,k} = \begin{cases} 1 & \text{车辆 } k \text{ 从站点 } V_i \text{ 行驶到 } V_j, i, j=0,1,2 \dots n, i \neq j; k=1,2 \dots m \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (1)$$

$$e_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{站点 } V_i \text{ 通勤任务由车辆 } k \text{ 执行}, i=1,2, \dots, n; k=1,2 \dots m \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (2)$$

可得到带多个约束的以通勤时间为目标函数的单目标优化模型:

$$\min T_{total} = \left(\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_{ij,k} r_{ij,k} \right) / v + \tau \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n e_{i,k}$$

$$s.t. \begin{cases} 1 \leq \sum_{k=1}^m e_{i,k} \leq 2 & i=0,1,2, \dots, n \\ \sum_{i=0}^n r_{ij,k} = e_{j,k} & j=0,1,2, \dots, n; k=1,2, \dots, m \\ \sum_{j=0}^n r_{ij,k} = e_{i,k} & i=0,1, \dots, n; k=1,2, \dots, m \\ \sum_{i=0}^n r_{ij,k} \leq 1 & j=0,1,2, \dots, n; k=1,2, \dots, m \\ \sum_{j=0}^n r_{ij,k} \leq 1 & i=0,1, \dots, n; k=1,2, \dots, m \end{cases}$$

(3)

企业常见的通勤车类型共有 37 座、51 座、53 座、56 座四种类型，将通勤车载客量统一按 $q = 56$ 计算，总通勤人数按某企业统计的通勤员工人数 $Q = 426$ ，代入下式得到通勤车的数量：

$$m = \text{INT}(Q / q) + 1 \quad (4)$$

式 (5) 中的 $\text{INT}()$ 为取整函数。

由此得到 $m = 8$ 。

以 $V = \{V_0, V_1, \dots, V_{25}\}$ 作为顶点集， E 作为顶点之间的边集， adj_matrix 作为邻接矩阵，构造赋权图 $G = (V, E, adj_matrix)$ ，则通勤问题的模型，如式 (1) ~ (3) 可视为顶点覆盖问题的非线性规划模型，将 $m = 8, n = 26$ 代入 (1) ~ (3)，并运用 Lingo 软件编写程序求解（程序见附件 1）^[7]，求解结果表 3 所示。

将《企业会计准则》规定的运输成本中的直接人工、直接材料、其他直接费用和营运间接费用四部分合并为三类：车辆的型号（或规格）相关联的费用；行驶路程相关联的费用；车辆数量有关联的费用。则旅游公司执行企业通勤运输任务的车组运输成本可按下式计算：

$$UC = TC / Q \quad (5)$$

其中：

UC : 大型车组运输单位成本

TC : 大型车组运输总成本

Q : 大型车组作业量

$$TC = \sum_{k=1}^m S_k \cdot P_{seat} + \sum_{k=1}^m L_{route}^k \cdot S_k \cdot Q_s + m \cdot W_{pay} \quad (6)$$

这里 S_k 为座位系数，可以此区分车辆型号相关的管理费用和参数，在企业常见的通勤车类型中，定义 51 座为标准座位配置，则各种通勤车的座位系数计算如下表 4。

表 3. 单目标寻优结果

通勤车 编号	行驶路线	路程/km	通勤人数
1	0-4-5-8-15-22-25	40.31	52
2	0-3-6-13-16-21-25	40.75	54
3	0-3-7-12-16-20-21-25	42.97	55
4	0-3-7-12-17-20-21-25	42.60	56
5	0-3-8-11-17-20-24-25	43.90	52
6	0-3-7-11-17-20-21-25	43.01	53
7	0-2-8-11-18-19-23-24-25	43.33	52
8	0-1-9-10-18-19-23-24-25	43.20	52
合计		340.07	426

表 4. 座位系数 (S_i)

座位数	51	37	53	56
座位系数	1.00	0.73	1.04	1.10

根据城市交通运输委员会客运处收费办法^[8]，不同座位数大巴车的 P_{seat} 相同，旅游公司不同座位数司乘人员的薪酬也相同，因此式 (6) 的运输总成本可简化为：

$$TC = m(P_{seat} + W_{pay}) + Q_s \cdot \sum_{k=1}^m L_{route}^k \cdot S_k \quad (7)$$

显然，只要通勤员工人数 Q 确定，那么通勤所需的座位数即课确定，通勤车辆数 m 也基本确定，因此，式 (7) 的第一项 $m(P_{seat} + W_{pay})$ 即使是不同运输方案也没有差别，所以，运输成本最小的数学模型还需增加座位系数和这一目标函数：

$$\min S_{coe} = \sum_{k=1}^m S_k \quad (8)$$

实际求解过程中，为了简化求解过程，加快求解进程，不必增加此目标函数，只需按照优化计算的结果分配、调整和校核不同座位的通勤车即可。

根据表 3. 可计算座位系数和 $S_{coe} = 1.04 + 1.10 + 1.10 + 1.10 + 1.04 + 1.04 + 1.04 + 1.04 = 8.5$ 。

综上所述，最小总行驶路程与最小座位系数和两个参数能描述一定通勤人数下的最小运输成本。

2.3.3 问题 3 建模与求解

实际通勤过程中，不同车辆因行驶路线和停靠的站点不同，行驶时间和行驶路程也各不相同，为避免不同车辆之间运输时间和运输路程差异过大，定义路程均衡度 η 作为评价指标^[9, 10]：

$$\eta = \frac{(L_{\max} - L_{\min})}{(\sum_{k=1}^m L_{route}^k) / m} \quad (9)$$

其中：

$$L_{route}^k = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_{ij,k} r_{ij,k} \quad k=1,2,\dots,m, \text{ 是第 } k \text{ 辆车的行驶路程；}$$

$$L_{\max} = \max\{L_1, L_2, \dots, L_m\}, \text{ 是 } m \text{ 辆车中最大的行驶路程；}$$

$$L_{\min} = \min\{L_1, L_2, \dots, L_m\}, \text{ 是 } m \text{ 辆车中最小的行驶路程。}$$

相应地，需要增加另外一个目标优化函数，即行驶路程的均衡度最小函数：

$$\min \eta = \frac{(L_{\max} - L_{\min})}{(\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_{ij,k} r_{ij,k}) / m} \quad (10)$$

所以，通勤问题变为如式（11）所示有 2 个目标函数的多目标优化模型。利用 Lingo 软件求解此多目标模型，可得到如表 4 的优化结果和座位系数总和。

表 4. 多目标优化结果

通勤车编号	通勤车经过的站点(上下车乘客数)	停靠站点	停靠时间/min	行驶路程/km	通勤时间/min
1	S[52]-D(6)-E(7)-N(8)-O(11)-X(15)-P(5)	D, E, N, O, X, (P)	30	40	70
2	S[54]-C(0)-F(8)-M(22)-Q(0)-W(24)-P(0)	F, M, W	18	41	59
3	S[55]-C(0)-G(0)-L(0)-Q(33)-V(22)-W(0)-P(0)	Q, V	12	43	55
4	S[56]-C(0)-G(0)-L(29)-R(27)-V(0)-W(0)-P(0)	L, R	12	43	55
5	S[51]-C(7)-H(25)-K(0)-R(0)-V(0)-Z(12)-P(8)	C, H, Z, (P)	18	44	62
6	S[53]-C(0)-G(26)-K(27)-R(0)-V(0)-W(0)-P(0)	G, K	12	43	55
7	S[52]-B(9)-H(0)-K(0)-T(10)-U(18)-Y(15)-Z(0)-P(0)	B, T, U, Y	24	43	67
8	S[52]-A(9)-I(11)-J(22)-T(10)-U(0)-Y(0)-Z(0)-P(0)	A, I, J, T	21	43	64
合计			147	340	487

注：[]内为上车乘客人数，()内为下车乘客人数

$$\min T_{total} = (\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_{ij,k} r_{ij,k}) / v + \tau \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n e_{i,k}$$

$$\min \eta = \frac{(L_{\max} - L_{\min})}{(\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_{ij,k} r_{ij,k}) / m}$$

$$s.t. \begin{cases} 1 \leq \sum_{k=1}^m e_{i,k} \leq 2 & i = 0, 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=0}^n r_{ij,k} = e_{j,k} & j = 0, 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=0}^n r_{ij,k} = e_{i,k} & i = 0, 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=0}^n r_{ij,k} \leq 1 & j = 0, 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=0}^n r_{ij,k} \leq 1 & i = 0, 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

(11)

从表 5 可以得到，行驶总路程为 340 公里，通勤时间为 487min，停靠时间为 147min，而座位系数总和与问题 2 相同为 $S_{coe}=8.5$ 。

3. 模型分析与检验

3.1 模型分析

分析问题 1 的求解方法可知，通勤城镇选定为一个近似圆形的覆盖区域，这是国内外大多数城镇的平面形状，将此区域用边长为 3.5 公里的正方形分块较为规则，但需要说明的是圆形覆盖区域并非为了简化问题的求解而特意选择的城镇，事实上，任何形状，甚至

是不规则的平面图形，都可以用正方形划分块，与圆形城镇一样，会产生边缘区域，也需要调整初始站点到交通便利的位置。

在问题 2 的建模和求解过程中，企业常见的通勤车类型共有 37 座、51 座、53 座、56 座四种类型并非假定，而是大巴车的产品序列。求解过程中代入的某企业统计的通勤员工人数 $Q=426$ 则是为了求解模型设定的数据，实际上不同企业的通勤人数即使各不相同，但建模方法仍然类似，只不过通勤车辆数和行驶路线数需要相应改变。除此之外，从式 (3) 的单目标函数和座位系数看，问题 2 的建模和求解过程中发现，不同运输路线之间行驶时间和行驶路程差异较大的问题。

分析问题 3 的数学模型可知，约束条件中增加了路程均衡度，且其取值定为小于 10%，该参数的取值为多少比较合理，尚需进一步讨论。另外，行驶路线均衡性的另一描述参数还可以是时间均衡度，综合考虑交通运输实际情况，时间均衡度理论上比路程均衡度更能准确一些，毕竟运输成本除过路程外，还要考虑时间（出租车运营就是一个例子），但本文由于考虑通勤车停靠通勤站点时，车辆怠速所消耗的燃料无法精确计算，所以，若选择时间均衡度，会增大误差，故以路程均衡度来评价不同行驶路线的均衡性更合理。

3.2 模型检验

问题 1 的建模求解方法虽然以常见的圆形通勤覆盖区域为背景，但少数为长条形或不规则形状的通勤覆盖区域，可以用正方形进行区块划分，如图 3 所示，也可以通过“迁移”初始站点的方法得到通勤站点。



图 3. 不规则（长条形）通勤区域正方形分块

问题 2 的建模和求解中，虽然通勤人数设定为 426，但如果超过或小于 426 人数，也可按问题 2 的方法建模和求解：如通勤人数为 600 人，则对应的通勤车辆的数量为 $600/56=10.7\approx 11$ ，即行驶路线数为 11，则问题 2 的建模与求解中，需要把通勤站点区域划分为 11 条，建模与求解方法不变。

问题 3 的建模和求解中，不同车辆行驶路线均衡性的评价参数，理论上既可以是最小时间均衡度，也可以是最小路程均衡度，两者的相对误差用 origin 软件进行分析，如图 4

所示。从图中可以看出不同行驶路线行驶时间的均衡性小于路程的均衡性，这主要是由于停靠时间的不同所导致。因为停靠站点时，通勤车的燃料消耗是怠速，而怠速油耗远小于行驶油耗，因此，均衡性的评价路程均衡度比时间均衡度更合理。

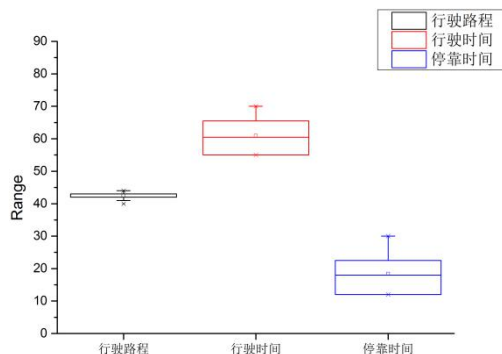


图 4. 不同行驶路线路程和时间的均衡性比较

4. 模型评价与后续改进

4.1 模型评价

问题 1 求解方法对通勤覆盖区域方块化划分确定初始通勤站点，然后根据地形礼貌将初始站点“迁移”到更便利的交通要道。这种求解方法简单易实现，便于通勤员工上下车和转乘公交车辆，但求解方法的自动化程度不高，容易受人为因素的影响。

问题 2 的数学模型类似于多路巡视灾情问题的建模与求解，为了求解此类问题，提出座位系数的概念，以最小总行驶路程与最小座位系数和两个参数描述最小运输成本，但实际求解过程并没有按惯常的求解多目标优化问题，将最小座位系数和作为目标函数，而是用此参数进行校验，通过最短路程的优化结果选择车辆型号，这样更直观，也大大缩短了多目标寻优时间。不足之处是采用 Lingo 求解模型，将多目标优化问题简化为单目标求解，影响了模型的精度。

问题 3 的数学模型为了减小不同行驶路线的通勤车量的运输路程和运输时间的差异，提出了均衡度的概念，以此评价不同行驶路线之间运输时间与运输路程的差异性。不足之处是在求解过程中，将均衡度作为约束条件处理，避免出现帕雷托 (Pareto) 解集，从而有可能陷入局部最优。

4.2 后续改进

问题 1 求解方法的区域分块和站点“迁移”后续可通过在百度地图提供的平台上进行二次编程开发，实现自动分块和站点调整。

问题 2 的数学模型本文以 Lingo 软件求解，求解结果的显示不形象直观，后续可采用 Matlab 编程和绘图，实现行驶路线的动态逼近，并直接连接站点序号直观显示求解结果。

问题 3 的数学模型中，应用式 (11) 进行多目标优化问题的求解比较复杂，所耗费时间也较多，而且多目标优化问题的解一般情况下不是唯一的，需要根据实际问题取舍。实际上式 (11) 的多目标优化问题可转化为单目标优化问题。考虑到最小时间目标优化函数与均衡度之间的关联性，将最小均衡度目标函数转化为约束条件 $\eta < \eta_0$ ，这里 η_0 为可允许的偏差值。综合考虑到路况和交通信号灯因素，取 $\eta_0=10\%$ ，即需要在式 (3) 增加路程均衡度的约束条件，得到如下的单目标函数：

$$\min T_{total} = \left(\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_{ij,k} r_{ij,k} \right) / v + \tau \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n e_{i,k}$$

$$s. t. \begin{cases} 1 \leq \sum_{k=1}^m e_{i,k} \leq 2 & i = 0, 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=0}^n r_{ij,k} = e_{j,k} & j = 0, 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=0}^n r_{ij,k} = e_{i,k} & i = 0, 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=0}^n r_{ij,k} \leq 1 & j = 0, 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=0}^n r_{ij,k} \leq 1 & i = 0, 1, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m \\ \frac{(L_{\max} - L_{\min})}{\left(\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n w_{ij,k} r_{ij,k} \right) / m} < 10\% \end{cases} \quad (12)$$

对式 (8) 求解，可很快得到表 4 的结果，多目标求解时间大为缩短。

5. 结论

本文以旅游公司的需求——为大型企业提供市内通勤班车服务为研究背景，运用图论、单目标优化和多目标优化理论和，以最小运输成本为目标函数，根据通勤人数确定了通勤站点的位置和数量，通勤车量的数量和型号、行驶路线等参数，从而为旅游公司确定了运输方案，主要结论如下：

(1) 采用建立运输成本数学模型后，不直接计算求解，而是根据成本模型的构成要素，先分析成本模型的影响因素，忽略不影响因素或不变部分，再优化成本模型的主要组成因素，简化了成本模型的求解过程；

(2) 通勤车站的数量和位置的确定方法为：先以边长为 3.5 公里的正方形对城市通勤覆盖区域进行分块，选定正方形中心为初始站点，然后根据路况调整到交通要道即可确定为通勤站点，该方法既适用于常见的圆形城镇地图，也适用于不规则的城镇图；

(3) 通勤总人数除以大巴座位数即为通勤行驶路线数, 最小总运输成本的两个主要影响因素为最小总运输路程和座位系数和;

(4) 行驶路程均衡度比行驶时间均衡度更能科学合理的反映不同行驶路线的差异, 以路程均衡度为约束条件, 用最小总运输路程代替最小总运输成本作为目标函数, 以最小座位系数和调整校核通勤车辆类型和数量, 可为旅游公司的通勤车辆调度确定最优运输方案。

参考文献

- [1] 百度地图开放平台, <http://api.map.baidu.com/lbsapi/createmap/index.html>
- [2] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 MATLAB 求解 (第 3 版) [M], 北京: 清华大学出版社, 2013: 34-56.
- [3] 司守奎, 孙兆亮. 数学建模算法与应用 [M], 北京: 国防工业出版社, 2016. 1:38-54.
- [4] 企业会计准则编审委员会, 企业会计准则详解与实务 (条文解读, 实务应用, 案例讲解) [M], 北京: 人民邮电出版社 (2018. 2): 44-66.
- [5] Frank R Giordano, William P Fox, Steven B Horton. A First Course in Mathematical Modeling [M], 北京: 机械工业出版社, 2016. 7:214-234.
- [6] 朱君, 蔡延光, 唐雅连. 水果运输调度问题的优化 [J], 北京联合大学学报, 2014, 28(2): 79-84.
- [7] 司守奎, 孙玺菁. LINGO 软件及应用 [M], 北京: 国防工业出版社, 2017. 5:129-140, 168-188.
- [8] 兰州市交通运输管理委员会客运管理处, http://jtj.lanzhou.gov.cn/art/2016/12/7/art_2659_133110.html.
- [9] 岳仁田, 王龙. 可接受空中交通流不均衡度模型构建 [J], 指挥信息系统与技术, 2017, 8(2): 77-81.
- [10] 丰富, 陈绍宽, 杜鹏. 考虑时间均衡度的城市轨道交通乘务排班计划优化方法 [J], 交通运输系统工程与信息, 2014, 14(6): 164-170.